149 - Groupes finis de petit cardinal

G désignera toujours un groupe fini.

I) Généralités

1) Définitions

Déf de sg distingué

Ppté : un sg d'indice 2 est distingué

Ex : <(1,2,3)> distingué dans S3

Déf de groupe simple

ex : A3=<(1,2,3)>=Z3 est simple

ex : un groupe d'ordre p est isomorphe à Zp et simple.

2) Produit D, produit SD

Def : définition de la loi [FG p.239]

Prop : caractérisation du psd [FG]

II) Actions de groupes, groupes résolubles

1) Actions de groupe

Déf : action de G sur X [Del 59]

Rq : une action sur un ensemble fini nous donne un morphisme de G dans S_|X| [Del 59]

Rq : un groupe peut agir sur n'importe quel ensemble (par forcément un groupe).

Ex : [Del 59]
- G agit sur lui-même par conjugaison
- G agit sur lui-même par translation à gauche
- Si H est un sg de G, G agit sur G/H par translation

Déf : stabilisateur, orbite, transversale [Del 60]

Prop : bijection entre O(x) et G/Gx [Del 61] *(on explicite la bijection : gx->g.Gx et on vérifie)*

2) Théorèmes de Sylow

Prop : G agit sur lui-même par conjugaison

Th : Sylow [Del 72]
(n=p^km. 1er th : il existe un p Sylow, ie un groupe d'ordre p^k. On appelle X l'ensemble des SOUS ENSEMBLES à p^k éléments. G agit sur X par translation à gauche. On calcule le cardinal de X, on voit qu'il n'est pas divisible par B, ça veut dire qu'il existe une orbite A qui est pas divisible par p. On pose H le stab d'un élément K de A. L'indice de H est non divisible par p car le cardinal de A ne l'est pas. Donc #H=p^km'. Soit x un élément de K. Pour tout g du stab H, g.x est dans K, et si on a deux g différents dans le stab, gx et gx' sont différents. On a une sorte d'injection du stab dans K, donc #H est plus petit que p^k. Donc #=p^k.

2e th : ils sont conjugués. S un p –Sylow de G, H un p groupe. H agit sur G/S par translation à gche. Le stab d'un élément de G/S est un sg du p groupe H donc son indice est une puissance de p : les orbites sont donc de # une puissance de p. Formule des classes : m=somme(puissances dep), or p divise pas m, donc il doit y avoir une orbite de # p^0=1. Soit xS cette orbite. On a hxS=xS pour tout h de H donc H inclus ds xSx^-1. Si H est un p Sylow on conclut par #.
3e th : nb de p-Sylow. S un p Sylow, il agit sur l'ensemble des p-Sylow par conjugaison. Les orbites sont des puissances de p. Il y a une orbite à un seul élément : {S}. Faut montrer que c'est la seule (RpA) et c'est gagné)

Corollaire : s'il y a un unique p-Sylow, il est distingué [Del 72]

Exemple : un groupe d'ordre pq n'est pas simple [Per p.27] *(raisonner sur les cardinaux)*

3) Groupes résolubles [Goz]

Déf et prop :

Exemples :
- G abélien => G résoluble

Prop : G résoluble => tout sg et tout quotient de G est résoluble

Prop : G résoluble ssi H et G/H resolubles

Prop : un groupe d'ordre 105 est tj résoluble

Prop : un p groupe est résoluble (plus précisément, on trouve une suite de groupes d'ordre p^i)

Un groupe d'ordre pq, pq², pqr est résoluble (appl de Sylow)

Appl : tous les groupes d'ordre <60 sont résolubles

III) Quelques petits groupes célèbres

1) Le groupe symétrique Sn pour n<5

- S1=Z1, S2=Z2. S1, S2, A1, A2 sont des groupes simples.

- S3 est d'ordre 6, non commutatif (exemple :) ; c'est le plus petit. Donc S3 n'est pas isomorphe à Z6. On vérifie le critère de produit SD, et on a S3 isomorphe à Z3 SD Z2.

- S4 est d'ordre 24. Il possède un groupe distingué A4. Parler de B4.

- Pour n plus grand que 5, A5 est simple

- Un sous groupe d'indice n de Sn est isomorphe à S_n-1)

2) Les groupes diédraux

Déf : groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés [Per 23]

Prop : #Dn=2n

Prop : générateurs (une rotation + une symétrie)

Prop : non abélien pour n>2. Plus précisément, égal à Zn SD Z2

3) Le groupe quaternionique

Définition : définition avec les formules entre i j et k [Per 13]

Prop : tous les sg sont distingués.

Prop : on ne peut pas le décomposer en produit direct/SD

4) Classification des petits groupes

- classification des groupes jusqu'à 12 [FG] ou [Per]
- classification groupes d'ordre 12 [FG 19]

5) Isomorphismes exceptionnels

Prop : liste cardinaux [Per 105]

Prop : un sous groupe d'ordre n de Sn est isomorphe à Sn-1 [Per 30] *(utilise la simplicité de An et l'action de Sn sur Sn/H par translation)*

Th : Isomorphismes exceptionnels [Per 106]

Développements :
1 - Isomorphismes exceptionnels [Perr 105] (***)
2 - Groupes d'ordre 12 [FG 19] (***)
3 - Iso+(T) et Iso+(C) [Aless 62] (* ou **)
An simple [Per 26] (* ou **)

Bibliographie :
Delcourt
Perrin
FG
Gozard

Rapport jury 2005-2009 :
Après avoir cité rapidement les théorèmes fondamentaux sur les groupes, la leçon doit se concentrer sur les exemples. Les développements ne peuvent pas porter sur les théorèmes généraux. C'est une leçon bien distincte de la leçon Groupes finis. Après avoir cité rapidement les théorèmes fondamentaux sur les groupes, la leçon doit se concentrer sur les exemples. Les développements ne peuvent pas porter sur les théorèmes généraux. C'est une leçon bien distincte de la leçon "Groupes finis". Une bonne référence reste les exercices du chapitre 1 du livre de Perrin.

Parler des sg de SO3 !